

یادداشت‌های ریاضی مالی (۷)

تئوری مدرن پورتفوی^۱ (MPT)

سعید اسلامی بیدگلی*

پیش از این نیز در مقاله تاریخ مدیریت مالی مرتون میلر اشاره کردم که بسیاری مقاله معروف مارکوویتز^۲ را آغاز ورود جدی ریاضیات به حوزه مالی و کمی شدن مباحثی همچون ریسک و بازده می‌دانند. از این‌رو در ادامه یادداشت‌های ریاضی مالی بر آن شدم تا در مورد تئوری مدرن پورتفوی (پورتفولیو)^۳ توضیح دهم.

در این مقاله به بررسی ریسک و بازده از نگاه تئوری مدرن پورتفوی پرداخته شده و مرز کارآی مارکوویتز توضیح داده شده است. همچنین کمی در مورد متنوع‌سازی اوراق بهادار توضیح داده‌ام. در ابتدای بحث بهتر است این نکته را روشن کنم که در تئوری‌های پورتفوی به بررسی ترکیب اوراق بهادار (و مدیریت آن‌ها) می‌پردازیم و بحث ارزشیابی تک تک اوراق پیش از این حوزه مطرح می‌شود.

پیش از مقاله مارکوویتز (۱۹۵۲) تصمیم‌گیری در مورد اوراق بهادار، کاملاً مستقل صورت می‌گرفت و اصولاً رابطه بین این اوراق مدنظر نبود^۴. بنابراین وقتی هدف افزایش بازده مورد انتظار باشد و ریسک هم به تنهایی در نظر گرفته شود، طبیعی است که برای هر کسی به انتخاب یک ورقه بهادار^۵ منجر خواهد شد (کمی فکر کنید). تئوری مارکوویتز در حقیقت ورود مسئله هم‌افزایی^۶ (که

^۱. Modern Portfolio Theory (MPT)

^۲. Portfolio Selection, The Journal of Finance, ۱۹۵۲

^۳. این کلمه را در فارسی بدره هم می‌گویند اما دو کلمه پورتفوی و پورتفولیو هم کاربرد دارد.

^۴. اصولاً در مورد این‌که مارکوویتز اولین نفر بوده شک وجود دارد. رابینشتین معتقد است که مارکوویتز اولین نفری بوده که این مطلب را در زبان انگلیسی فرموله کرده است!

^۵. در کل این متن Security به عنوان ورقه بهادار ترجمه شده است.

^۶. Synergy

ارزش یک کل بیش از مجموع ارزش‌های اجزای تشکیل دهنده آن است) به حوزه اوراق بهادار بود. مارکویتز اشاره داشت که می‌توان با تشکیل یک پورتفوی در سطح معینی از بازده انتظاری باقی ماند و ریسک کمتری را هم تحمل کرد. عده‌ای معتقدند که افزوده^۷ بزرگ مارکویتز همین معرفی مساله متنوع‌سازی^۸ مجموعه اوراق بهادار است.

در تئوری مدرن پورتفوی مجموعه اوراق بهادار از طریق تجزیه و تحلیل بازده مورد انتظار، ریسک (تغییرات در بازده انتظاری) و رابطه بین اجزای مجموعه اوراق بهادار (که از طریق ضریب همبستگی اندازه‌گیری می‌کنیم) بررسی می‌شود. برای روشن شدن مطلب بهتر است به چند موضوع بیشتر فکر کنیم. به نظر شما بهتر است که سرمایه خود را در یک دارایی سرمایه‌گذاری کنید که ارزش انتظاری پایین و نوسان کم دارد یا در دارایی دیگری که ارزش انتظاری بالا و نوسان زیاد دارد؟ دارایی اول شما را تا حدی از بازده انتظاری (هر چند کم است) مطمئن می‌سازد اما با نگهداری دارایی دوم شما ممکن است خیلی ثروتمند و خوشحال 😊 و یا خیلی زیان‌داده و ناراحت ☹ بشوید.^۹ شاید هم بهتر باشد که ترکیبی از این دو دارایی (و یا هزاران دارایی در دسترس دیگر) را نگهداری کنید. تئوری مدرن پورتفوی به دنبال راه حلی برای پاسخ این سوال است. مسئله‌ای که البته MPT راه حل پایانی آن نبود و تا به امروز هم ادامه دارد . . .

فرض کنید که N دارایی در دسترس داریم که می‌توانیم در آن‌ها سرمایه‌گذاری کنیم. در این صورت برای تحلیل از طریق MPT، نیاز به $\frac{N(N-1)}{2} + 2N$ پارامتر داریم^{۱۰}. ارزش انتظاری هر کدام از این دارایی‌ها (N)، انحراف استاندارد (که نشانی از تغییرپذیری بازده انتظاری است) هر کدام از دارایی‌ها (N) و همبستگی^{۱۱} بین هر دو دارایی باهم $(N(N-1)/2)$. لازم به ذکر است که در تئوری مدرن پورتفولیو توزیع بازده دارایی‌ها، نرمال فرض می‌شود و از این‌روست که انحراف استاندارد (و یا واریانس) معیار خوبی برای ارزیابی تغییرپذیری بازده انتظاری است.

^۷ . Contribution

^۸ . Diversification

۹ . در این جا مسایل رفتاری هم مطرح می‌شود که فعلا از آن‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم.

^{۱۰} . با این عدد در یادداشت‌های بعدی کار داریم.

^{۱۱} . Correlation

پس از دانستن متغیرهایی که در بالا ذکر شد، به محاسبه بازده انتظاری و ریسک پورتفوی‌های در دست بررسی می‌پردازیم. برای محاسبه بازده و ریسک فرض کنید که یک پورتفوی (Π) متشکل از N دارایی (یا سهم) در اختیار دارید که سهم سرمایه‌گذاری در دارایی i ام، W_i است، میانگین دارایی i ام با μ_i و انحراف معیار آن با σ_i نمایش داده می‌شود. خیلی ساده به دست می‌آید که بازده انتظاری کل پورتفوی از طریق فرمول زیر محاسبه خواهد شد:

$$\mu_{\Pi} = \sum_{i=1}^N W_i \mu_i$$

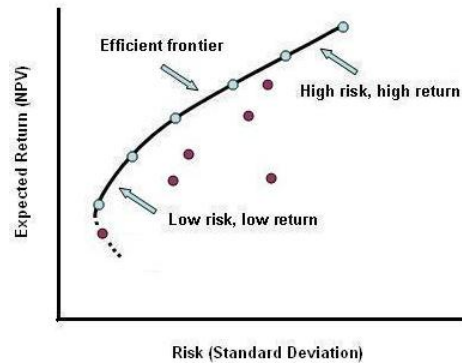
$$\sum_{i=1}^N W_i = 1$$

همچنین انحراف استاندارد نیز از فرمول زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\sigma_{\Pi} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N W_i W_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

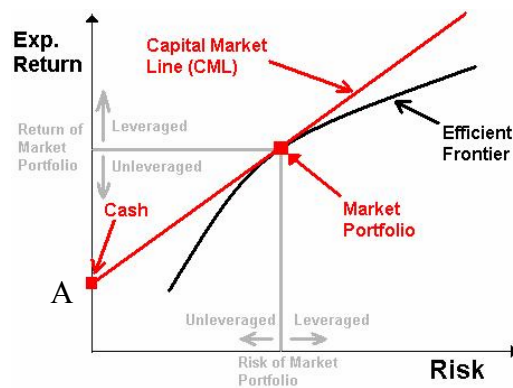
توجه کنید که اگر $i=j$ ، در آن صورت $\rho_{ij}=1$ خواهد بود. مارکویتز نشان داد که چگونه با تعیین W_i ها، برای سطح معینی از ریسک، بیشترین بازدهی مورد انتظار را به دست آوریم. نموداری که بر این اساس در فضای ریسک-بازده کشیده می‌شود و در آن بیشترین بازده انتظاری را در سطح معینی از ریسک تعیین می‌شود، مرز کاراً^{۱۲} (یا مرز مارکویتز) نامیده می‌شود. در شکل زیر مشاهده می‌کنید که هر کدام از دارایی‌های زیر این مرز در مقایسه با یکی از دارایی‌ها (یا ترکیب دارایی‌ها) روی مرز کاراً دارای ریسک یکسان و بازده کمتر می‌باشد؛ بنابراین توجیهی برای انتخاب آن وجود ندارد.

^{۱۲} . Efficient Frontier



با این حساب کسی پورتهوی یا دارایی که روی این مرز کاراً قرار ندارد را انتخاب نخواهد کرد. ضمناً مشخص است که چون ρ کوچکتر یا مساوی یک است، اضافه کردن یک دارایی جدید، به مجموعه دارایی‌ها انحراف استاندارد را زیاد نخواهد کرد و همچنین با اضافه کردن دارایی که ضریب همبستگی آن با مجموعه موجود دارایی‌ها کمتر از یک است، می‌توان ریسک کل پورتهوی را پایین آورد. این همان مفهوم متنوع سازی اوراق بهادار است.

تا این جا فرض بر این بود که دارایی بدون ریسک وجود ندارد. اگر این دارایی (نقطه A) را هم به مجموعه دارایی‌ها اضافه کنیم، مرز کاراً به یک خط تبدیل می‌شود که به آن خط بازار سرمایه^{۱۳} (CML) می‌گویند. نقطه تماس این خط با مرز کارای مارکویتز، پورتهوی بازار^{۱۴} نام دارد. به راحتی اثبات می‌شود که با وجود دارایی بدون ریسک، به جز ترکیبات مختلف پورتهوی بازار و دارایی بدون ریسک، انتخاب نخواهد شد.



^{۱۳} . Capital Market Line (CML)

^{۱۴} . Market Portfolio

نقطه A به معنای سرمایه‌گذاری تمام وجوه در دارایی بدون ریسک و نقطه پورتفوی بازار به معنای سرمایه‌گذاری تمام وجوه در دارایی ریسکی است. نقاطی که در سمت راست Market Portfolio و روی خط CML قرار دارند، از طریق وام‌گیری وجوه (با نرخ بدون ریسک) و سرمایه‌گذاری در دارایی ریسکی حاصل شده‌اند (leveraged).

* دانشجوی دکتری مدیریت مالی